DEVOIR DE CONTRÔLE N°1 3 ÈME MATHS

EXERCICE N° 1 3 points

Répondre par vrai ou faux en **justifiant** votre réponse.

1 La fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2}$ est bornée.

2 f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, si $|f|$ est continue sur I alors f est continue sur I.

3 f une fonction continue sur $[a\,;b]$ telle que $f(a) < a.b$ et $f(b) > b^2$ alors il existe un réel $c \in [a\,;b]$ vérifiant $f(c) = b.c$.

4 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\left(2+\sqrt{3}\right)$. Alors l'angle formé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\dfrac{5\pi}{6}$.

EXERCICE N° 2 5 points

A- Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x^2 - x^3}$.

1 Déterminer l'ensemble de définition de f.

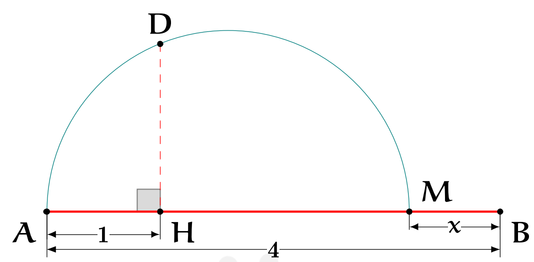
2 **a** Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $3x^2 - x^3 = 4 - (x-2)^2(x+1)$.

b En déduire que f admet un maximum sur $[0\,;3]$ que l'on précisera.

B-

Dans la figure ci-contre :

- $[AB]$ est un segment de longueur 4.
- H est un point de $[AB]$ tel qeu $AH = 1$.
- M est un point de du segment $[HB]$ tel que $BM = x$.
- Γ est le demi cercle de diamètre $[AM]$.
- La perpendiculaire à (AB) en H coupe Γ en D.



1 **a** Justifier que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = AD^2$

b En déduire que $AD = \sqrt{4-x}$.

c Calculer alors DH.

2 Déterminer alors la position du point M pour que l'aire du triangle BMD est maximale.

EXERCICE N° 3 5 points

Dans le graphique ci-dessous

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4, 9]$

La droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

1 Déterminer :

a Les intervalles sur lesquels f est continue.

b L'image, par f, de chacun des intervalles : $[1, 6[$, $[-4, -2]$ et $[-2\,;2]$.

2 **a** Résoudre graphiquement les équations : $E\left(f(x)\right) = 0$ et $f\left(E(x)\right) = 0$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

b Résoudre, dans l'intervalle $[-2, 9]$, l'inéquation $\sqrt{f(x)+1} \leq \sqrt{5}$.

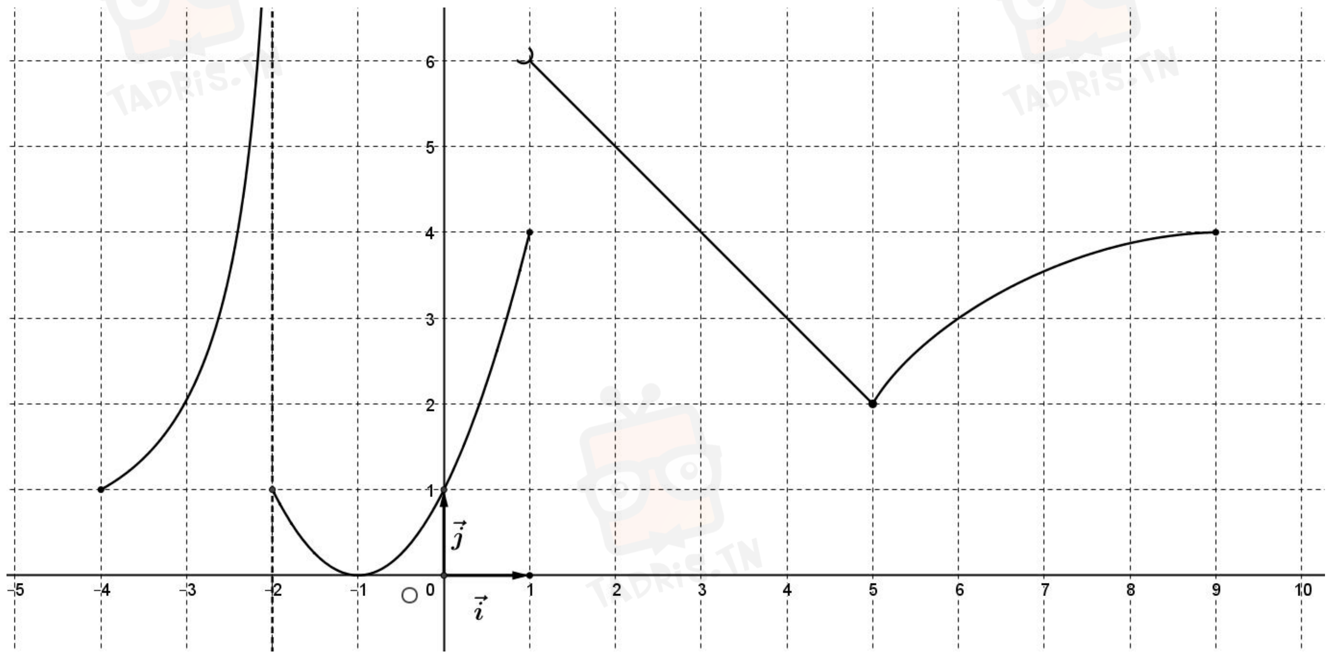
3 Montrer que, l'équation $f(x) = -x^3$, admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1, 1]$.

4 Pour tout $x \in [-2\,; 1]$, on donne $f(x) = x^2 + 2x + 1$ et on désigne par $A(-2, -1)$ et M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x.

- **a** Vérifier que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = -x^2 - 4x - 1$.
- **b** Déterminer les coordonnées de M dans chacun des cas suivants :

  Le triangle OAM soit rectangle en O.

  $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}$ soit maximal.



Exercice N° 4 **7 points**

On donne un parallélogramme $ABCD$ de centre I tels que : $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{2}$ et $\widehat{BAD} = \dfrac{3\pi}{4}$.

1
- **a** Calculer $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AB}$.
- **b** En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
- **c** Faire une figure.

2 Soit M un point de la droite (AB). On pose $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

- **a** Montrer que $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AD} = -2 - 4x$.
- **b** Déterminer alors le point F de (AB) tel que (IF) est perpendiculaire à (AD).
- **c** Vérifier que F est le barycentre des points pondérés $(A, -3)$ et $(B, 1)$

3 Pour tout point M du plan, on pose $f(M) = MB^2 - 3MA^2$.
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$ où k est un réel donné.

- **a** Montrer que $f(M) = -2MF^2 + 6$.
- **b** Discuter suivant le paramètre réel k la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$.

4 Soit Δ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{FB} = 6$.

- **a** Vérifier que $I \in \Delta$.
- **b** Déterminer alors l'ensemble Δ.
- **c** Dans le cas où $\mathscr{E}$ est un cercle, déterminer k pour que $\mathscr{E}$ soit tangent à Δ.